

Équidistribution des sous-variétés de petite hauteur

Pascal Autissier

1 février 2008

Abstract

In this paper, the equidistribution theorem of Szpiro-Ullmo-Zhang about sequences of small points in an abelian variety is extended to the case of sequences of higher dimensional subvarieties. A quantitative version of this result is also given.

Introduction

Dans ce texte, on appelle **variété** sur un corps K tout schéma intègre et projectif sur K .

Commençons par rappeler les travaux de Szpiro, Ullmo et Zhang sur l'équidistribution des petits points (*cf* [17]) :

Définition : Soit V une variété sur \mathbb{Q} . Une suite $(Y_n)_{n \geq 0}$ de fermés intègres de V est dite **générique** dans V lorsque pour tout fermé $Z \neq V$, l'ensemble $\{n \in \mathbb{N} \mid Y_n \subset Z\}$ est fini.

Soit K un corps de nombres de degré N . Notons G_K l'ensemble des plongements $\sigma : K \hookrightarrow \mathbb{C}$. Soit A une variété abélienne sur K de dimension d . Remarquons que $A(\mathbb{C})$ est alors l'union disjointe des groupes $A_\sigma(\mathbb{C})$. Soit μ la mesure de probabilité sur $A(\mathbb{C})$ égale sur chaque $A_\sigma(\mathbb{C})$ à la mesure de Haar de masse $1/N$.

Soit \hat{h}_L la hauteur de Néron-Tate relativement à un faisceau inversible L symétrique et ample sur A . Soit $(P_n)_{n \geq 0}$ une suite de points fermés de A . Pour tout $n \geq 0$, on pose $k_n = \deg(P_n) = [k(P_n) : \mathbb{Q}]$.

Lorsque Z est un fermé réduit de $A_{\mathbb{C}}$ purement de codimension q , on désigne par δ_Z le courant d'intégration sur $Z(\mathbb{C})$ (c'est un $(q; q)$ -courant sur $A(\mathbb{C})$).

Szpiro, Ullmo et Zhang ont démontré le théorème d'équirépartition suivant :

Théorème 0 : *Supposons que la suite $(P_n)_{n \geq 0}$ est générique dans A et que*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{k_n} \hat{h}_L(P_n) = 0. \text{ Alors la suite de mesures } \left(\frac{1}{k_n} \delta_{P_n(\mathbb{C})} \right)_{n \geq 0} \text{ converge faiblement vers } \mu.$$

Ce résultat a permis à Ullmo [18] et Zhang [20] de prouver la conjecture de Bogomolov (cf aussi [1]).

On étend ici le théorème 0 aux suites génériques de sous-variétés :

Soit $\|\cdot\|$ une “métrique du cube” (cf [12]) sur $L_{\mathbb{C}}$. Notons ω la $(1;1)$ -forme de courbure de $(L_{\mathbb{C}}; \|\cdot\|)$ sur $A(\mathbb{C})$ et posons $k = \deg_L(A)$. Remarquons que l’on a $\omega^{\wedge d} = k\mu$ sur $A(\mathbb{C})$.

Soit $(Y_n)_{n \geq 0}$ une suite de fermés intègres de A de dimension p . On pose $k_n = \deg_L(Y_n)$ pour tout $n \geq 0$. On prouve le résultat suivant :

Théorème (4.1) : *Supposons que la suite $(Y_n)_{n \geq 0}$ est générique dans A et que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \hat{h}_L(Y_n) = 0$. Alors la suite de mesures $\left(\frac{1}{k_n} \omega^{\wedge p} \wedge \delta_{Y_{n\mathbb{C}}}\right)_{n \geq 0}$ converge faiblement vers μ .*

La démonstration s’inspire de celle du théorème 0. Elle se place donc dans le cadre de la théorie d’Arakelov (cf [5]), et utilise le théorème de “Hilbert-Samuel arithmétique” dû à Gillet et Soulé [9] (cf aussi Abbes et Bouche [2]).

Remarquons en particulier que si $(Y_n)_{n \geq 0}$ est générique dans A et si U est un ouvert non vide de $A(\mathbb{C})$ disjoint de $Y_{n\mathbb{C}}$ pour tout n assez grand, alors on a $\liminf_{n \rightarrow +\infty} \hat{h}_L(Y_n) > 0$. On peut donner une version quantitative de ce résultat :

Théorème (6.1) : *On suppose la suite $(Y_n)_{n \geq 0}$ générique dans A . Soit U_η une boule ouverte de $A(\mathbb{C})$ de rayon $\eta \in]0; \eta_0[$ telle que U_η soit disjoint de son conjugué complexe. On suppose que U_η et $Y_{n\mathbb{C}}$ sont disjoints pour tout $n \geq 0$. Alors on a $\liminf_{n \rightarrow +\infty} \hat{h}_L(Y_n) \geq c_0 \eta^{2d+2}$ (η_0 et c_0 sont des constantes ne dépendant que de $(K; A; L; p)$).*

Par ailleurs, Zhang a proposé une généralisation de la conjecture de Bogomolov (cf [19]) :

Soient V une variété lisse sur \mathbb{Q} et L un faisceau inversible ample sur V . Supposons que l’on a un morphisme fini $f : V \rightarrow V$ et un isomorphisme $L^{\otimes m} \simeq f^*L$, où m est un entier > 1 .

Définition : Un fermé intègre Y de V est dit **prépériodique** lorsque l’ensemble $\{f^n(Y) ; n \in \mathbb{N}\}$ est fini.

Lorsque l’on a de telles données, Zhang a montré comment obtenir une hauteur canonique \hat{h}_L généralisant la construction de Néron-Tate. En particulier, la fonction \hat{h}_L est positive ; si un fermé intègre Y de V est prépériodique, alors on a $\hat{h}_L(Y) = 0$; et un point fermé P est prépériodique si et seulement si $\hat{h}_L(P) = 0$.

Dans cette situation, la conjecture de Zhang s'énonce ainsi :

Conjecture (i) : Soit Y un fermé intègre de V . Si $\hat{h}_L(Y) = 0$, alors Y est prépériodique.

Zhang a montré que $\hat{h}_L(Y) = 0$ si et seulement si Y contient une suite de points fermés $(P_n)_{n \geq 0}$ générique dans Y telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \hat{h}_L(P_n) = 0$. En particulier, si Y contient un ensemble Zariski-dense de points fermés prépériodiques, alors Y est conjecturalement prépériodique.

Ce dernier énoncé, qui ne fait plus intervenir de hauteur, rappelle une conjecture de dynamique complexe :

Conjecture (ii) : Soient M une variété lisse sur \mathbb{C} et $f : M \rightarrow M$ un morphisme fini. On suppose qu'il existe un faisceau inversible L ample sur M tel que $L^{\otimes m} \simeq f^*L$ avec $m > 1$. Si un fermé intègre Y de M contient un ensemble Zariski-dense de points prépériodiques, alors Y est prépériodique.

Cette conjecture "s'applique" en particulier au cas où M est l'espace projectif $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^d$ et f un morphisme fini de degré > 1 (on prend alors $L = \mathcal{O}(1)$).

Par ailleurs, lorsque M est une variété abélienne sur \mathbb{C} et f la multiplication par un entier > 1 , la conjecture (ii) est un théorème de Raynaud (*cf* [15]).

Pour attaquer la conjecture (i), on pourrait commencer par prouver un résultat d'équidistribution des petits points analogue au théorème 0. La mesure limite μ serait alors la mesure à l'équilibre du système dynamique $(V_{\mathbb{C}}; f_{\mathbb{C}})$.

La difficulté de cette approche est que l'on est amené, semble-t-il, à utiliser un théorème de Hilbert-Samuel arithmétique sans hypothèse de positivité de la courbure, qui n'est connu que pour les surfaces arithmétiques (*cf* propositions 3.3.3 et 4.1.4 de [3]).

Je remercie Romain Dujardin et Charles Favre pour des discussions intéressantes concernant la conjecture (ii). Je remercie également Antoine Chambert-Loir pour ses suggestions concernant la section 5. Je remercie Serge Cantat pour de fructueuses conversations et pour ses conseils concernant ce papier. Enfin, je remercie Emmanuel Ullmo pour l'inspiration qu'il m'a procurée.

1 Définitions et notations

Soient M une variété lisse sur \mathbb{C} et L un faisceau inversible sur M .

Définition : Une **métrique** sur L est une famille $\|\cdot\|$ de normes hermitiennes sur L variant de manière continue sur $M(\mathbb{C})$. Posons $\hat{L} = (L; \|\cdot\|)$.

On note $\omega_{\hat{L}}$ le $(1; 1)$ -courant de courbure de \hat{L} sur $M(\mathbb{C})$; il est caractérisé par la propriété suivante : pour toute section rationnelle s non nulle de L , on a

l'égalité $\omega_{\widehat{L}} = \delta_{\text{div}(s)} - \frac{i}{\pi} \partial \bar{\partial} \ln \|s\|$.

Définition : Soit $\| \cdot \|$ une métrique sur L ; posons $\widehat{L} = (L; \| \cdot \|)$. On dit que $\| \cdot \|$ est **p.s.h.** lorsque le courant $\omega_{\widehat{L}}$ est positif, autrement dit lorsque pour tout ouvert U de M et tout $s \in \Gamma(U; L)$ ne s'annulant pas sur U , la fonction $-\ln \|s\|$ est plurisousharmonique sur $U(\mathbb{C})$.

Définitions : Une **variété arithmétique** est un schéma X intègre, projectif et plat sur \mathbb{Z} , tel que la fibre générique $X_{\mathbb{Q}}$ soit lisse sur \mathbb{Q} . Remarquons que $X_{\mathbb{C}}$ est alors l'union disjointe de variétés lisses sur \mathbb{C} .

Un **faisceau inversible hermitien** sur X est un couple $\widehat{\mathcal{L}} = (\mathcal{L}; \| \cdot \|)$, formé d'un faisceau inversible \mathcal{L} sur X et d'une métrique $\| \cdot \|$ sur $\mathcal{L}_{\mathbb{C}}$ invariante par conjugaison complexe.

Remarque : Soit Y un schéma intègre et projectif sur \mathbb{Z} . On a deux possibilités :

- Y est plat et surjectif sur $B_0 = \text{Spec}(\mathbb{Z})$; Y est alors dit horizontal ;
- Y est au-dessus d'un point fermé $b = p\mathbb{Z}$ de B_0 (ie Y est une variété sur \mathbb{F}_p) ; Y est alors dit vertical.

2 Théorie d'Arakelov

Soient X une variété arithmétique de dimension (absolue) d , et $\widehat{\mathcal{L}} = (\mathcal{L}; \| \cdot \|)$ un faisceau inversible hermitien sur X dont la métrique $\| \cdot \|$ est C^∞ . Pour $0 \leq p \leq d$, on désigne par $Z_p(X)$ le groupe des combinaisons \mathbb{Z} -linéaires de fermés intègres (de X) de dimension p .

Faisons quelques rappels de la théorie des hauteurs développée par Bost, Gillet et Soulé :

Pour $0 \leq p \leq d$, on définit (cf [9] p. 485, [5] p. 933) le groupe de Chow arithmétique de dimension p , noté $\widehat{\text{CH}}_p(X)$. Le degré arithmétique définit une application \mathbb{Z} -linéaire $\widehat{\text{deg}} : \widehat{\text{CH}}_0(X) \rightarrow \mathbb{R}$. Pour $1 \leq p \leq d$, on construit la première classe de Chern arithmétique $\widehat{c}_1(\widehat{\mathcal{L}}) : \widehat{\text{CH}}_p(X) \rightarrow \widehat{\text{CH}}_{p-1}(X)$, qui est \mathbb{Z} -linéaire.

Soient maintenant $p \in \{0; \dots; d\}$ et $D \in Z_p(X)$. Soit g un courant de Green pour $D_{\mathbb{C}}$. Le réel

$$h_{\widehat{\mathcal{L}}}(D) = \widehat{\text{deg}} \left[\widehat{c}_1(\widehat{\mathcal{L}})^p(D; g) - (0; \omega_{\widehat{\mathcal{L}}_{\mathbb{C}}}^{\wedge p} \wedge g) \right]$$

ne dépend pas du choix de g . On l'appelle la **hauteur d'Arakelov** de D relativement à $\widehat{\mathcal{L}}$.

Soit Y un fermé intègre horizontal de dimension p tel que $\deg_{\mathcal{L}_{\mathbb{Q}}}(Y_{\mathbb{Q}}) > 0$. La **hauteur normalisée** de Y relativement à $\widehat{\mathcal{L}}$ est le réel

$$h'_{\widehat{\mathcal{L}}}(Y) = \frac{h_{\widehat{\mathcal{L}}}(Y)}{\deg_{\mathcal{L}_{\mathbb{Q}}}(Y_{\mathbb{Q}})p} \quad .$$

Proposition 2.1 : *Soient Y un fermé intègre de X de dimension $p \geq 1$, n un entier ≥ 1 , et s une section rationnelle non nulle de $\mathcal{L}_{|Y}^{\otimes n}$ (sur Y). Alors on a l'égalité*

$$h_{\widehat{\mathcal{L}}}(Y)n = h_{\widehat{\mathcal{L}}}(\operatorname{div}(s)) - \int_{Y(\mathbb{C})} \ln \|s_{\mathbb{C}}\| \omega_{\widehat{\mathcal{L}}_{\mathbb{C}}}^{p-1}$$

(On convient que l'intégrale est nulle si Y est vertical).

Démonstration : C'est la proposition 3.2.1 (iv) de [5] p. 949. \square

Le résultat suivant est un analogue arithmétique du théorème de Hilbert-Samuel :

Théorème 2.2 : *Supposons \mathcal{L} ample et la métrique $\|\cdot\|$ p.s.h.. Soit $\epsilon > 0$. Alors pour tout entier n assez grand, il existe une section globale s non nulle de $\mathcal{L}^{\otimes n}$ telle que $\max_{X(\mathbb{C})} \ln \|s_{\mathbb{C}}\| \leq \epsilon n - h'_{\widehat{\mathcal{L}}}(X)n$.*

Démonstration : cf théorème 9 de [9] p. 539 ou corollaire du théorème principal de [2]. \square

3 Hauteurs

3.1 Hauteurs de Weil

Soient V une variété lisse sur \mathbb{Q} et L un faisceau inversible ample sur V . Notons V^{\diamond} l'ensemble des fermés intègres de V .

Définition : Un **modèle entier** de $(V; L)$ est un couple $(X; \widehat{\mathcal{L}})$, formé d'une variété arithmétique X et d'un faisceau inversible hermitien $\widehat{\mathcal{L}} = (\mathcal{L}; \|\cdot\|)$ sur X tels que $(X_{\mathbb{Q}}; \mathcal{L}_{\mathbb{Q}})$ soit isomorphe à $(V; L)$, que \mathcal{L} soit ample sur X , que la métrique $\|\cdot\|$ soit C^{∞} , et que la courbure $\omega_{\widehat{\mathcal{L}}_{\mathbb{C}}}$ soit définie positive sur $X(\mathbb{C})$.

Remarquons que pour tout entier e assez grand, le couple $(V; L^{\otimes e})$ admet un modèle entier.

La définition suivante étend aux sous-variétés la notion classique de hauteur de Weil sur les points :

Définition : Une application $\hat{h} : V^{\diamond} \rightarrow \mathbb{R}$ est une **hauteur de Weil** relativement à L lorsqu'il existe un entier $e \geq 1$, un modèle entier $(X; \widehat{\mathcal{L}})$ de $(V; L^{\otimes e})$ et un réel C tels que

$$\forall Y \in V^{\diamond} \quad \left| \hat{h}(Y) - \frac{1}{e} h'_{\widehat{\mathcal{L}}}(\overline{Y}) \right| \leq C$$

(\overline{Y} désigne l'adhérence de Y dans X).

La proposition suivante montre entre autres que cette définition “ne dépend pas du choix de $(e; X; \widehat{\mathcal{L}})$ ” :

Proposition 3.1 : *Soit \hat{h} une hauteur de Weil relativement à L . Alors pour tout entier $e \geq 1$ et tout modèle entier $(X; \widehat{\mathcal{L}})$ de $(V; L^{\otimes e})$, il existe un réel C tel que $\forall Y \in V^\diamond \quad \left| \hat{h}(Y) - \frac{1}{e} h'_{\widehat{\mathcal{L}}}(\overline{Y}) \right| \leq C$.*

En outre, la fonction \hat{h} est minorée sur V^\diamond .

Démonstration : La première partie de l'énoncé est une reformulation de la proposition 3.2.2 de [5] p. 950. La deuxième partie se déduit de la remarque (iii) de [5] p. 954. \square

3.2 Hauteur canonique

Soient V une variété lisse sur \mathbb{Q} et L un faisceau inversible ample sur V . On suppose que l'on a un morphisme fini $f : V \rightarrow V$ et un isomorphisme $\alpha : L^{\otimes m} \xrightarrow{\sim} f^*L$, où m est un entier > 1 .

À partir de ces données, Zhang construit une hauteur de Weil particulière relativement à L par un procédé dynamique :

Proposition 3.2 : *Il existe une unique hauteur de Weil \hat{h}_L relativement à L telle que pour tout $Y \in V^\diamond$, on ait l'égalité $\hat{h}_L(f(Y)) = \hat{h}_L(Y)m$.*

De plus, on a les propriétés suivantes :

- Si \hat{h} est une hauteur de Weil relativement à L , alors la suite de fonctions $\left(\frac{1}{m^n} \hat{h} \circ f^n \right)_{n \geq 0}$ converge uniformément sur V^\diamond vers la fonction \hat{h}_L ;
- La fonction \hat{h}_L est positive sur V^\diamond ;
- Si Y est un fermé intègre prépériodique de V , alors on a $\hat{h}_L(Y) = 0$;
- Un point fermé P de V est prépériodique si et seulement si $\hat{h}_L(P) = 0$.

Démonstration : C'est une reformulation du théorème 2.4 de [19] p. 292. \square

L'application \hat{h}_L est appelé la **hauteur canonique** relativement à $(L; f)$. Remarquons qu'elle ne dépend pas du choix de l'isomorphisme α .

4 Équidistribution

Soit K un corps de nombres de degré N . Soient A une variété abélienne sur K de dimension d et $0_A \in A(K)$ sa section neutre. Pour tout entier non nul c , on note $[c] : A \rightarrow A$ le morphisme de multiplication par c .

Soit L un faisceau inversible symétrique (ie $[-1]^*L \simeq L$) et ample sur A . On fixe un isomorphisme $0_A^*L \simeq \mathcal{O}_B$ sur $B = \text{Spec}(K)$. Par le théorème du cube, on en déduit naturellement un isomorphisme $[c]^*L \simeq L^{\otimes c^2}$ sur A pour chaque entier $c \geq 2$.

La hauteur canonique \hat{h}_L relativement à $(L; [c])$ ne dépend pas du choix de l'entier $c \geq 2$; c'est la **hauteur de Néron-Tate** relativement à L (cf aussi [13] et [10]).

On fixe un entier $c \geq 2$. D'après [12] p. 50-52, il existe une unique métrique $\|\cdot\|$ de classe C^∞ sur $L_{\mathbb{C}}$ telle que l'isomorphisme $[c]^*L \simeq L^{\otimes c^2}$ devienne une isométrie (ie une "métrique du cube").

Notons ω la courbure de $(L_{\mathbb{C}}; \|\cdot\|)$; posons $k = \deg_L(A)$ et $\mu = \frac{1}{k}\omega^d$. Pour tout plongement $\sigma : K \hookrightarrow \mathbb{C}$, la mesure μ_σ est alors la mesure de Haar de masse $1/N$ sur $A_\sigma(\mathbb{C})$.

Soit $(Y_n)_{n \geq 0}$ une suite de fermés intègres de A de dimension p . On pose $k_n = \deg_L(Y_n)$ pour tout $n \geq 0$.

Théorème 4.1 : *Supposons que la suite $(Y_n)_{n \geq 0}$ est générique dans A et que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \hat{h}_L(Y_n) = 0$. Alors la suite de mesures $\left(\frac{1}{k_n}\omega^p \delta_{Y_{nc}}\right)_{n \geq 0}$ converge faiblement vers μ .*

Démonstration : Posons $\nu_n = \frac{1}{k_n}\omega^p \delta_{Y_{nc}}$ pour tout entier $n \geq 0$. Il s'agit de montrer que pour toute fonction ϕ continue sur $A(\mathbb{C})$, la suite numérique $\left(\int_{A(\mathbb{C})} \phi \nu_n\right)_{n \geq 0}$ converge vers $\int_{A(\mathbb{C})} \phi \mu$.

Il suffit en fait de le vérifier pour ϕ invariante par conjugaison complexe et C^∞ sur $A(\mathbb{C})$. Il existe alors un réel $t_0 > 0$ tel que pour tout $t \in [-t_0; t_0]$, la $(1; 1)$ -forme $\omega_t = \omega + \frac{it}{\pi} \partial \bar{\partial} \phi$ soit positive sur $A(\mathbb{C})$. Soient $t \in [-t_0; t_0]$ et $\epsilon > 0$.

On choisit un entier $e \geq 1$ et un modèle $(X; \hat{\mathcal{L}})$ de $(A; L^{\otimes e})$ tels que la métrique sur \mathcal{L} soit la métrique du cube $\|\cdot\|^{\otimes e}$.

Pour tout $Y \in A^\diamond$, on pose $\hat{h}(Y) = \frac{1}{e} h'_{\hat{\mathcal{L}}}(\bar{Y})$, où \bar{Y} désigne l'adhérence de Y dans X . L'application \hat{h} est par définition une hauteur de Weil relativement à L . D'après la proposition 3.2, il existe $n_1 \geq 0$ tel que $\left| \hat{h} \circ [c^{n_1}] - c^{2n_1} \hat{h}_L \right| \leq c^{2n_1} \epsilon$ sur A^\diamond . On pose $e_1 = c^{2n_1} e$.

On construit un modèle $(X'; \hat{\mathcal{L}}')$ de $(A; L^{\otimes e_1})$ de la manière suivante :

On désigne par $f : X' \rightarrow X$ la normalisation de X par le morphisme $[c^{n_1}] : A \rightarrow A$, de sorte que l'on a $f_{\mathbb{Q}} = [c^{n_1}]$ sur $X'_{\mathbb{Q}} \simeq A$. On pose alors $\hat{\mathcal{L}}' = (\mathcal{L}'; \|\cdot\|') = f^* \hat{\mathcal{L}}$.

Par la formule de projection (cf proposition 3.2.1 (iii) de [5] p. 949), on a, pour tout $Y \in A^\diamond$, la relation $\hat{h}([c^{n_1}](Y))e = h'_{\hat{\mathcal{L}}'}(\overline{Y}')$, où \overline{Y}' désigne l'adhérence de Y dans X' . On en déduit :

$$\forall Y \in A^\diamond \quad \left| \hat{h}_L(Y) - \frac{1}{e_1} h'_{\hat{\mathcal{L}}'}(\overline{Y}') \right| \leq \epsilon \quad . \quad (1)$$

On pose $\| \cdot \|'_t = \| \cdot \|' \exp(-e_1 t \phi)$ et $\hat{\mathcal{L}}'_t = (\mathcal{L}'; \| \cdot \|'_t)$. Par multilinéarité, on a la formule

$$h_{\hat{\mathcal{L}}'_t}(X') - h_{\hat{\mathcal{L}}'}(X') = (d+1)e_1^{d+1} k t^2 Q(t) + (d+1)e_1^{d+1} t \int_{A(\mathbb{C})} \phi \omega^d \quad ,$$

où $Q(T) = \sum_{j=1}^d \frac{C_{d+1}^{j+1}}{(d+1)k} T^{j-1} \int_{A(\mathbb{C})} \phi \left(\frac{i}{\pi} \partial \bar{\partial} \phi \right)^j \omega^{d-j}$ est un polynôme en T .

Sachant que $\hat{h}_L(A) = 0$, on en déduit à l'aide de (1) la minoration

$$\frac{1}{e_1} h'_{\hat{\mathcal{L}}'_t}(X') \geq t^2 Q(t) - \epsilon + t \int_{A(\mathbb{C})} \phi \mu \quad . \quad (2)$$

Maintenant, appliquons le théorème 2.2 (Hilbert-Samuel arithmétique) : il existe $n_2 \geq 1$ et $s \in \Gamma(X'; \mathcal{L}'^{\otimes n_2}) - \{0\}$ tels que $\max_{A(\mathbb{C})} \ln \|s_{\mathbb{C}}\|'_t \leq \epsilon n_2 - h'_{\hat{\mathcal{L}}'_t}(X') n_2$.

Posons $Z = \text{div}(s_{\mathbb{Q}})$. Puisque la suite $(Y_n)_{n \geq 0}$ est générique dans A , il existe un entier $n_3 \geq 0$ tel que $\forall n \geq n_3 \quad Y_n \notin Z$. Alors, d'après la proposition 2.1, on a (pour tout $n \geq n_3$) :

$$\begin{aligned} h_{\hat{\mathcal{L}}'}(\overline{Y_n}') n_2 - h_{\hat{\mathcal{L}}'}(\text{div}(s|_{\overline{Y_n}'})) &= -e_1^p \int_{Y_n(\mathbb{C})} (n_2 e_1 t \phi + \ln \|s_{\mathbb{C}}\|'_t) \omega^p \\ &\geq [h'_{\hat{\mathcal{L}}'_t}(X') - \epsilon] e_1^p n_2 k_n - e_1^{p+1} n_2 k_n t \int_{A(\mathbb{C})} \phi \nu_n \quad . \end{aligned}$$

Majorons le premier membre : En utilisant (1) et la positivité de \hat{h}_L , on obtient d'une part l'inégalité $h_{\hat{\mathcal{L}}'}(\text{div}(s|_{\overline{Y_n}'})) \geq -e_1^{p+1} p n_2 k_n \epsilon$ et d'autre part l'inégalité $h_{\hat{\mathcal{L}}'}(\overline{Y_n}') \leq [\hat{h}_L(Y_n) + \epsilon] (p+1) e_1^{p+1} k_n$. On en déduit à l'aide de la minoration (2) que l'on a (pour tout $n \geq n_3$) :

$$(p+1) \hat{h}_L(Y_n) + t \int_{A(\mathbb{C})} \phi \nu_n \geq t^2 Q(t) - (2p+3) \epsilon + t \int_{A(\mathbb{C})} \phi \mu \quad . \quad (3)$$

On fait tendre n vers $+\infty$ puis ϵ vers 0 dans ce qui précède ; sachant que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \hat{h}_L(Y_n) = 0$, on trouve l'inégalité

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \left(t \int_{A(\mathbb{C})} \phi \nu_n \right) \geq t^2 Q(t) + t \int_{A(\mathbb{C})} \phi \mu \quad .$$

Finalement, en faisant tendre t vers 0 :

- Par valeurs supérieures, on obtient $\liminf_{n \rightarrow +\infty} \left(\int_{A(\mathbb{C})} \phi \nu_n \right) \geq \int_{A(\mathbb{C})} \phi \mu$;

- Par valeurs inférieures, on obtient $\limsup_{n \rightarrow +\infty} \left(\int_{A(\mathbb{C})} \phi \nu_n \right) \leq \int_{A(\mathbb{C})} \phi \mu$.

On en déduit le résultat. \square

5 Variante arakelovienne

Soient X une variété arithmétique de dimension d et $\widehat{\mathcal{L}} = (\mathcal{L}; \|\cdot\|)$ un faisceau inversible hermitien sur X . On suppose que \mathcal{L} est ample sur X , que la métrique $\|\cdot\|$ est C^∞ , et que la courbure $\omega = \omega_{\widehat{\mathcal{L}}}$ est définie positive sur $X(\mathbb{C})$. Le couple $(X; \widehat{\mathcal{L}})$ est donc un modèle entier de $(X_{\mathbb{Q}}; \mathcal{L}_{\mathbb{Q}})$.

Posons $k = \deg_{\mathcal{L}_{\mathbb{Q}}}(X_{\mathbb{Q}})$ et $\mu = \frac{1}{k} \omega^{d-1}$. Soit $(Y_n)_{n \geq 0}$ une suite de fermés intègres de $X_{\mathbb{Q}}$ de dimension p . On pose $k_n = \deg_{\mathcal{L}_{\mathbb{Q}}}(Y_n)$ pour tout $n \geq 0$.

On fait l'hypothèse $(*)$ suivante : pour tout fermé intègre Y de $X_{\mathbb{Q}}$ de dimension $p-1$, on a $h'_{\widehat{\mathcal{L}}}(\overline{Y}) \geq h'_{\widehat{\mathcal{L}}}(X)$.

Remarquons que cette hypothèse est automatiquement vérifiée lorsque $p = 0$.

Proposition 5.1 : *Supposons que la suite $(Y_n)_{n \geq 0}$ est générique dans $X_{\mathbb{Q}}$ et que $\lim_{n \rightarrow +\infty} h'_{\widehat{\mathcal{L}}}(\overline{Y_n}) = h'_{\widehat{\mathcal{L}}}(X)$. Alors la suite de mesures $\left(\frac{1}{k_n} \omega^p \delta_{Y_n} \right)_{n \geq 0}$ converge faiblement vers μ .*

Démonstration : Posons $\nu_n = \frac{1}{k_n} \omega^p \delta_{Y_n}$ pour tout entier $n \geq 0$. Soit ϕ une fonction invariante par conjugaison complexe et C^∞ sur $X(\mathbb{C})$. Il existe un réel $t_0 > 0$ tel que pour tout $t \in [-t_0; t_0]$, la $(1, 1)$ -forme $\omega_t = \omega + \frac{it}{\pi} \partial \bar{\partial} \phi$ soit positive sur $X(\mathbb{C})$.

Soient $t \in [-t_0; t_0]$ et $\epsilon > 0$. On pose $\|\cdot\|_t = \|\cdot\| \exp(-t\phi)$ et $\widehat{\mathcal{L}}_t = (\mathcal{L}; \|\cdot\|_t)$. Par multilinéarité, on a la relation

$$h_{\widehat{\mathcal{L}}_t}(X) - h_{\widehat{\mathcal{L}}}(X) = dkt^2 Q(t) + dt \int_{X(\mathbb{C})} \phi \omega^{d-1},$$

où Q est une fonction polynômiale.

D'après le théorème 2.2, il existe $n_1 \geq 1$ et $s \in \Gamma(X; \mathcal{L}^{\otimes n_1}) - \{0\}$ tels que $\max_{X(\mathbb{C})} \ln \|s_{\mathbb{C}}\|_t \leq \epsilon n_1 - h'_{\widehat{\mathcal{L}}_t}(X) n_1$.

Posons $Z = \text{div}(s_{\mathbb{Q}})$. La suite $(Y_n)_{n \geq 0}$ étant générique dans $X_{\mathbb{Q}}$, il existe un entier $n_2 \geq 0$ tel que $\forall n \geq n_2, Y_n \not\subset Z$. Alors, en appliquant la proposition 2.1,

on obtient (pour tout $n \geq n_2$) :

$$\begin{aligned} h_{\widehat{\mathcal{L}}}(\overline{Y_n})n_1 - h_{\widehat{\mathcal{L}}}(\operatorname{div}(s|_{\overline{Y_n}})) &= - \int_{Y_n(\mathbb{C})} (n_1 t \phi + \ln \|s_{\mathbb{C}}\|_t) \omega^p \\ &\geq [h'_{\widehat{\mathcal{L}_t}}(X) - \epsilon] n_1 k_n - n_1 k_n t \int_{X(\mathbb{C})} \phi \nu_n \quad . \end{aligned}$$

Grâce à l'hypothèse (*), on a la minoration $h_{\widehat{\mathcal{L}}}(\operatorname{div}(s|_{\overline{Y_n}})) \geq p n_1 k_n h'_{\widehat{\mathcal{L}}}(X)$. On en déduit que pour tout $n \geq n_2$, on a

$$(p+1)h'_{\widehat{\mathcal{L}}}(\overline{Y_n}) + t \int_{X(\mathbb{C})} \phi \nu_n \geq (p+1)h'_{\widehat{\mathcal{L}}}(X) + t^2 Q(t) - \epsilon + t \int_{X(\mathbb{C})} \phi \mu \quad .$$

On conclut comme dans la démonstration du théorème 4.1. \square

6 Version quantitative

Soient K un corps de nombres, A une variété abélienne sur K de dimension d , et L un faisceau inversible symétrique et ample sur A . Soit $\|\cdot\|$ une métrique du cube sur $L_{\mathbb{C}}$. On note ω la courbure de $(L_{\mathbb{C}}; \|\cdot\|)$ et on pose $k = \deg_L(A)$.

On fixe un plongement $\sigma : K \hookrightarrow \mathbb{C}$ et un isomorphisme $A_{\sigma}(\mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}^d / \Gamma$ de groupes analytiques (où Γ est un réseau de \mathbb{C}^d) tel que la $(1; 1)$ -forme ω_{σ} s'écrive

$$\omega_{\sigma} = \frac{i}{2} \sum_{j=1}^d dz_j \wedge d\overline{z_j} \text{ dans } \mathbb{C}^d / \Gamma.$$

On munit \mathbb{C}^d de la norme hermitienne canonique, notée $\|\cdot\|$. Lorsque $z \in \mathbb{C}^d$, on note ici \dot{z} l'image de z dans \mathbb{C}^d / Γ . On munit \mathbb{C}^d / Γ de la distance D induite par $\|\cdot\|$, ie $D(\dot{x}; \dot{y}) = \min_{\gamma \in \Gamma} \|x - y + \gamma\|$. Par ailleurs, on pose $\eta_0 = \frac{1}{2} \min_{\gamma \in \Gamma - \{0\}} \|\gamma\|$.

Soit $(Y_n)_{n \geq 0}$ une suite de fermés intègres de A de dimension p . Posons $c_0 = \frac{2\pi^d}{(p+1)(d+1)k}$. Soit U_{η} une boule ouverte de $A_{\sigma}(\mathbb{C})$ de rayon $\eta \in]0; \eta_0[$. Si σ est réel, on suppose U_{η} disjoint de son conjugué complexe.

Théorème 6.1 : *On suppose que la suite $(Y_n)_{n \geq 0}$ est générique dans A et que $Y_{n\mathbb{C}}$ est disjoint de U_{η} pour tout $n \geq 0$. Alors on a $\liminf_{n \rightarrow +\infty} \hat{h}_L(Y_n) \geq c_0 \eta^{2d+2}$.*

Démonstration : Soient \dot{z}_0 le centre de U_{η} et U'_{η} le conjugué complexe de U_{η} . Soit $\psi : [0; \eta_0[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction C^{∞} vérifiant :

- La fonction ψ est nulle sur $[\eta; \eta_0[$;
- On a $\psi' \geq -1$ et $\psi'' \geq 0$ sur $[0; \eta_0[$.

Soit $\phi : A(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction caractérisée par les propriétés suivantes :

- Si $\|z - z_0\| < \eta$, alors $\phi(\dot{z}) = \frac{\pi}{2} \psi(\|z - z_0\|^2)$;
- La fonction ϕ est invariante par conjugaison complexe ;

- La fonction ϕ est nulle en dehors de $U_\eta \cup U'_\eta$.

La $(1;1)$ -forme $\omega_1 = \omega + \frac{i}{\pi} \partial \bar{\partial} \phi$ est alors positive sur $A(\mathbb{C})$. On reprend avec $t_0 = t = 1$ la démonstration du théorème 4.1, jusqu'à l'inégalité (3) :

$$\forall n \geq n_3 \quad (p+1)\hat{h}_L(Y_n) + \int_{A(\mathbb{C})} \phi \nu_n \geq Q_1 - (2p+3)\epsilon \quad ,$$

$$\text{où } Q_1 = \frac{1}{k} \sum_{j=0}^d \int_{A(\mathbb{C})} \phi \omega_1^j \omega^{d-j}.$$

L'intégrale dans le premier membre est nulle puisque $Y_{n\mathbb{C}}$ et U_η sont dis-joints. En faisant tendre n vers $+\infty$ puis ϵ vers 0 dans l'inégalité précédente, on obtient donc la minoration $\liminf_{n \rightarrow +\infty} \hat{h}_L(Y_n) \geq \frac{Q_1}{p+1}$.

Par ailleurs, un calcul que j'épargne au lecteur montre que

$$Q_1 = \frac{4\pi^d}{k} \int_0^\eta \left[1 - \left(1 + \psi'(r^2) \right)^{d+1} \right] r^{2d+1} dr \quad .$$

On a donc

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \hat{h}_L(Y_n) \geq c_0 \int_0^\eta \left[1 - \left(1 + \psi'(r^2) \right)^{d+1} \right] (2d+2) r^{2d+1} dr \quad .$$

Maintenant, soit $\psi_0 : [0; \eta_0[\rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $\psi_0(\rho) = \eta - \rho$ si $\rho < \eta$ et $\psi_0(\rho) = 0$ si $\rho \geq \eta$. En faisant tendre ψ vers ψ_0 convenablement, on en déduit le résultat. \square

7 Cas des courbes

Soient V une courbe lisse sur \mathbb{Q} , L un faisceau inversible ample sur V , $f : V \rightarrow V$ un morphisme fini, et $\alpha : L^{\otimes m} \xrightarrow{\sim} f^*L$ un isomorphisme, où m est un entier > 1 .

Notons μ la mesure à l'équilibre du système dynamique $(V_{\mathbb{C}}; f_{\mathbb{C}})$. Soit $(P_n)_{n \geq 0}$ une suite de points fermés de V . Pour tout $n \geq 0$, on pose $k_n = [k(P_n) : \mathbb{Q}]$.

Citons pour mémoire la variante suivante de la proposition 4.1.4 de [3] :

Proposition 7.1 : *Supposons que la suite $(P_n)_{n \geq 0}$ est générique dans V et que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \hat{h}_L(P_n) = 0$. Alors la suite de mesures $\left(\frac{1}{k_n} \delta_{P_{n\mathbb{C}}} \right)_{n \geq 0}$ converge faiblement vers μ .*

Références

- [1] *A. Abbes* : Hauteurs et discrétude. Astérisque **245** (1997), p. 141-166.
- [2] *A. Abbes, T. Bouche* : Théorème de Hilbert-Samuel “arithmétique”. Annales de l’Institut Fourier **45** (1995), p. 375-401.
- [3] *P. Autissier* : Points entiers sur les surfaces arithmétiques. Journal für die reine und angew. Math. **531** (2001), p. 201-235.
- [4] *Y. Bilu* : Limit distribution of small points on algebraic tori. Duke Math. Journal **89** (1997), p. 465-476.
- [5] *J.B. Bost, H. Gillet, C. Soulé* : Heights of projective varieties and positive Green forms. Journal of the AMS **7** (1994), p. 903-1027.
- [6] *G.S. Call, J.H. Silverman* : Canonical heights on varieties with morphisms. Compositio Math. **89** (1993), p. 163-205.
- [7] *S. Cantat* : Endomorphismes des variétés homogènes, à paraître.
- [8] *A. Chambert-Loir* : Points de petite hauteur sur les variétés semi-abéliennes. Annales Scientifiques de l’ENS **33** (2000), p. 789-821.
- [9] *H. Gillet, C. Soulé* : An arithmetic Riemann-Roch theorem. Inventiones Math. **110** (1992), p. 473-543.
- [10] *W. Gubler* : Höhentheorie. Math. Annalen **298** (1994), p. 427-455.
- [11] *V. Maillot* : Géométrie d’Arakelov des variétés toriques et fibrés en droites intégrables. Mémoires de la SMF **80** (2000).
- [12] *L. Moret-Bailly* : Métriques permises. Astérisque **127** (1985), p. 29-87.
- [13] *P. Philippon* : Sur des hauteurs alternatives I. Math. Annalen **289** (1991), p. 255-283.
- [14] *B. Poonen* : Mordell-Lang plus Bogomolov. Inventiones Math. **137** (1999), p. 413-425.
- [15] *M. Raynaud* : Sous-variétés d’une variété abélienne et points de torsion. Progress in Math. **35** (1983), p. 327-352.
- [16] *R. Rumely* : On Bilu’s equidistribution theorem. Contemporary Math. **237** (1999), p. 159-166.
- [17] *L. Szpiro, E. Ullmo, S. Zhang* : Équirépartition des petits points. Inventiones Math. **127** (1997), p. 337-347.
- [18] *E. Ullmo* : Positivité et discrétion des points algébriques des courbes. Annals of Math. **147** (1998), p. 167-179.
- [19] *S. Zhang* : Small points and adelic metrics. Journal of Algebraic Geometry **4** (1995), p. 281-300.
- [20] *S. Zhang* : Equidistribution of small points on abelian varieties. Annals of Math. **147** (1998), p. 159-165.